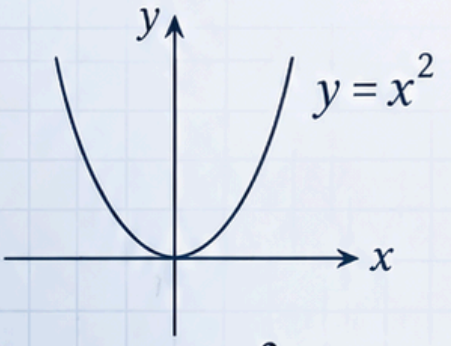
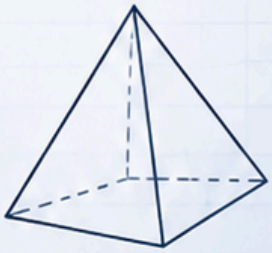
# الملخص الشامل

## بكالوريا الرياضيات




$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$z = a + bi$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\int f(x)\,dx$$

$$f'(x)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$





تأليف

د. سفيان مرابطي

مكتبة د. سفيان مرابطي

# كتب أخرى تنتظرك

جزآ «مملكة الخلايا»، وبقية كتبي في البرامج والبرمجة والتقنية، وبعضها مجاني.

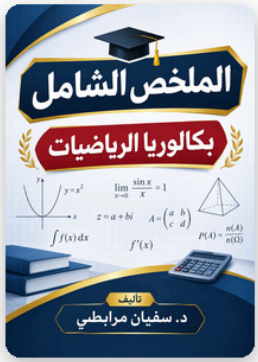
اضغط على أي غلاف لتصل إليها.









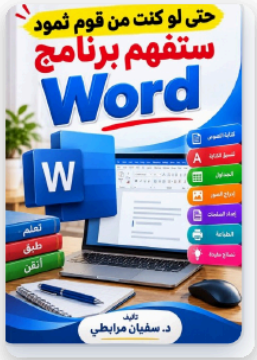
























# الملخص الشامل لبكالوريا الرياضيات

تأليف: د. سفيان مرابطي

## جميع الحقوق محفوظة © 2026

لا يجوز نسخ هذا الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه أو نقله أو إعادة نشره أو بيعه بأي شكل أو وسيلة، إلكترونية أو ورقية، دون إذن كتابي مسبق من المؤلف.

يُسمح بالاستخدام الشخصي والتعليمي للدراسة والمراجعة فقط، مع الإشارة إلى المصدر وعدم التعديل على المحتوى أو الادعاء بنسبته إلى غير مؤلفه.

بُذل أقصى جهد في إعداد هذا الملخص وتدقيقه، ويرحَّب بأي ملاحظة أو تصحيح لتحسين الطبعات القادمة.

اعتُمد في إعداد هذا الملخص على ملخص مادة الرياضيات للأستاذ توامي (DzExams)، مع إعادة التنظيم والتصحيح والإضافة.

الطبعة الأولى · 2026

اضغط على أي عنوان للانتقال إلى صفحته

# فهرس المحتويات


## الباب 1: قواعد الحساب

الجداءات الشهيرة والمعادلات من الدرجة الثانية ..... 6

القيمة المطلقة والحصر ..... 7

حساب المثلثات (1): القيم والعلاقات ..... 8

حساب المثلثات (2): الدائرة المثلثية ..... 9

## الباب 2: النهايات والاستمرارية

النهايات (1): المرجعية وحالات عدم التعيين ..... 10

النهايات (2): المبرهنات والنهايات الشهيرة ..... 11

المستقيمات المقاربة ..... 12

الاستمرارية وصورة مجال ..... 13

مبرهنة القيم المتوسطة ..... 14

## الباب 3: الاشتقاقية ودراسة الدوال

الاشتقاقية: التعريف والدوال المألوفة ..... 15

العمليات على المشتقات واتجاه التغير ..... 16

التفسيرات الهندسية للاشتقاقية ..... 17

شفعية دالة، مركز ومحور تناظر، الوضعية النسبية ..... 18

إنشاء منحنى انطلاقا من منحنى آخر والمناقشة البيانية ..... 19

منهجية دراسة دالة عددية ..... 20

## الباب 4: الدالتان اللوغاريتمية والأسية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ..... 21

الدالة الأسية ..... 22

## الباب 5: المتتاليات العددية

المتتاليتان الحسابية والهندسية ..... 23

الاستدلال بالتراجع وخواص المتتاليات ..... 24

# فهرس المحتويات (تابع)


## الباب 6: الأعداد المركبة

الأعداد المركبة: الأشكال والخواص ..... 25

توظيف الطويلة والعمدة في الهندسة ..... 26

متوازي الأضلاع، المعين، المربع، المستطيل والمثلثات ..... 27

التحويلات النقطية والمعادلات في المركبة ..... 28

## الباب 7: الهندسة الفضائية

الهندسة الفضائية (1): الأشعة والمستويات والكرة ..... 29

الهندسة الفضائية (2): المرجح والتمثيلات الوسيطية ..... 30

الهندسة الفضائية (3): الأوضاع النسبية ..... 31

## الباب 8: الدوال الأصلية والحساب التكاملي

الدوال الأصلية ..... 32

المعادلات التفاضلية والتكامل ..... 33

حساب المساحات والحجوم ..... 34

## الباب 9: الاحتمالات

الاحتمالات (1): القوانين الأساسية ..... 35

الاحتمالات (2): التعداد والمتغير العشوائي والقانون الثنائي ..... 36

## الباب 10: الحسابيات: الموافقات والأعداد الأولية

الموافقات في $\mathbb{Z}$ والقاسم المشترك الأكبر ..... 37

مبرهنات بيزو وغوص وفيرما ..... 38

## ملحق: نصائح للنجاح

نصائح ذهبية للنجاح في البكالوريا ..... 39

# الجداءات الشهيرة والمعادلات من الدرجة الثانية

## الجداءات الشهيرة

| من الدرجة الثانية | من الدرجة الثالثة |
|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$<br>$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$<br>$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ | $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$<br>$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$<br>$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$<br>$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ |

## المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

**المميز:** $\Delta = b^2 - 4ac$

| الحالة | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| الحلول | حلان متمايزان:<br>$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | حل مضاعف:<br>$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ | لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ |
| التحليل | $a(x-x_1)(x-x_2)$ | $a(x-x_0)^2$ | لا يمكن التحليل في $\mathbb{R}$ |
| إشارة $ax^2+bx+c$ | إشارة $a$ خارج الجذرين<br>وإشارة $(-a)$ بينهما | إشارة $a$ دائما<br>(تنعدم عند $x_0$) | إشارة $a$ دائما |

### علاقات مفيدة

- مجموع الجذرين وجداؤهما (عند $\Delta \geq 0$): $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ ، $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- الشكل النموذجي: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
- إذا كان $a + b + c = 0$ فإن 1 جذر والجذر الآخر $\dfrac{c}{a}$ ؛ وإذا كان $a - b + c = 0$ فإن $-1$ جذر والآخر $\dfrac{-c}{a}$.
- إذا كان $ac < 0$ فإن $\Delta > 0$ دوما (للمعادلة جذران متمايزان بإشارتين مختلفتين).

### مثال

حل $2x^2 - 5x + 3 = 0$: لدينا $2 - 5 + 3 = 0$ إذن $x = 1$ جذر، والجذر الآخر $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$.

# القيمة المطلقة والحصر

## خواص القيمة المطلقة

من أجل كل عددين حقيقيين $x$ و $y$:

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert x\rvert \geq 0$ | $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$ | $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$ |
| $\lvert x \times y\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$ | $\left\lvert \dfrac{x}{y}\right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}\quad (y \neq 0)$ | $\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ |
| $\lvert x\rvert = \begin{cases} x & ;\ x \geq 0 \\ -x & ;\ x \leq 0 \end{cases}$ | $\lvert x-a\rvert = \begin{cases} x-a & ;\ x \geq a \\ -x+a & ;\ x \leq a \end{cases}$ | $\lvert x+a\rvert = \begin{cases} x+a & ;\ x \geq -a \\ -x-a & ;\ x \leq -a \end{cases}$ |

## حل معادلات ومتراجحات تتضمن القيمة المطلقة

| الكتابة | المعنى والحل |
|---|---|
| $\lvert x\rvert = a\ \ (a>0)$ | $x = a$ أو $x = -a$ (وإذا كان $a < 0$ فلا حل) |
| $\lvert x\rvert \leq a\ \ (a \geq 0)$ | $-a \leq x \leq a$ أي $x \in [-a;a]$ |
| $\lvert x\rvert \geq a$ | $x \geq a$ أو $x \leq -a$ |
| $\lvert x-a\rvert \leq r$ | $a-r \leq x \leq a+r$ (المسافة بين $x$ و $a$ لا تتجاوز $r$) |
| $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$ | $x = y$ أو $x = -y$ |
| $\lvert x-a\rvert = \lvert x-b\rvert$ | $x = \dfrac{a+b}{2}$ (النقطة المتساوية البعد عن $a$ و $b$) |

## قواعد الحصر

لتكن $a, b, c, d$ أعدادا حقيقية موجبة تماما، و $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$.

| العملية | الحصر |
|---|---|
| جمع | $a+c \leq x+y \leq b+d$ |
| طرح | $a-d \leq x-y \leq b-c$ |
| ضرب | $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$ |
| قسمة | $\dfrac{a}{d} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{b}{c}$ |

**تنبيه**

عند الضرب في عدد سالب تنعكس المتراجحة. وللأعداد الموجبة: $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$ و $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ و $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

لإثبات $A \leq B$ ادرس إشارة الفرق $B - A$.

# حساب المثلثات (1): القيم والعلاقات

## القيم الخاصة

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | — | $0$ | — |

### علاقات أساسية

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ ، } -1 \le \cos x \le 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{(زوجية)}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{(فردية)}$$

### الجمع والتضعيف والتحويل

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

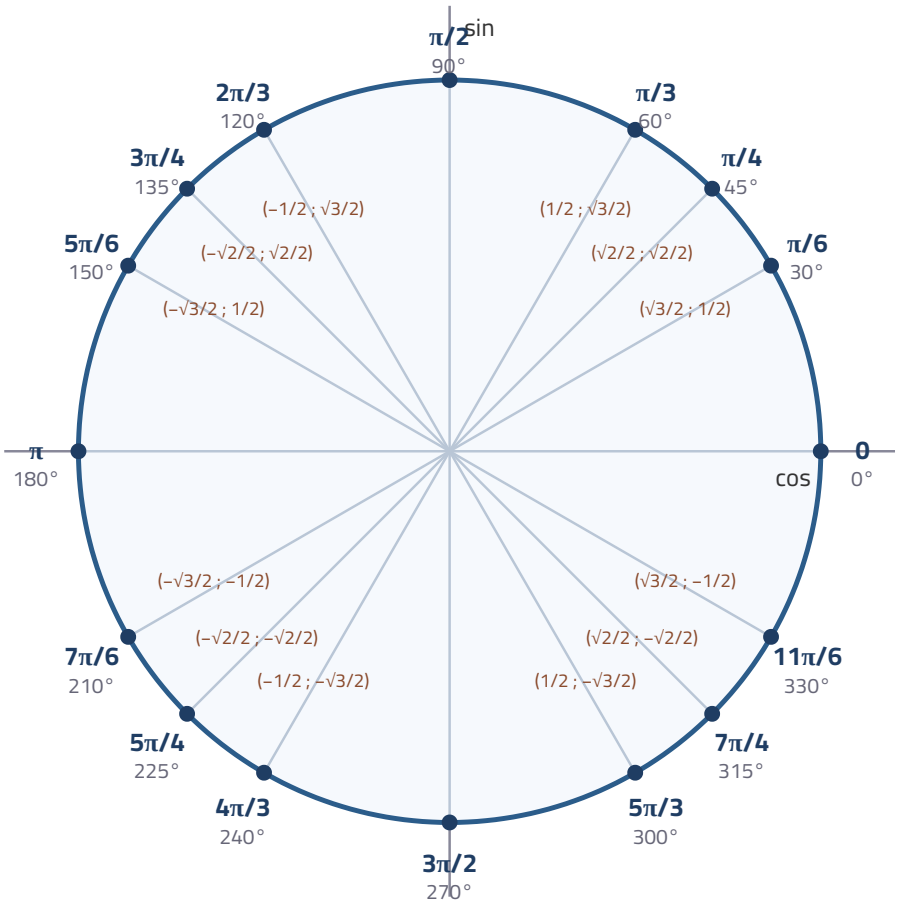
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ ، } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

## المعادلات المثلثية الأساسية

| المعادلة | الحلول ($k \in \mathbb{Z}$) |
|---|---|
| $\cos x = \cos a$ | $x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi$ |
| $\sin x = \sin a$ | $x = a + 2k\pi$ أو $x = \pi - a + 2k\pi$ |
| $\tan x = \tan a$ | $x = a + k\pi$ |
| $a\cos x + b\sin x = c$ | نكتب $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$ حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ ، $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ |

# حساب المثلثات (2): الدائرة المثلثية




## الزوايا المرتبطة

| $x$ | $-x$ | $\pi - x$ | $\pi + x$ | $\frac{\pi}{2} - x$ | $\frac{\pi}{2} + x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos$ | $\cos x$ | $-\cos x$ | $-\cos x$ | $\sin x$ | $-\sin x$ |
| $\sin$ | $-\sin x$ | $\sin x$ | $-\cos x$ | $\cos x$ | $\cos x$ |

### كيف أقرأ الدائرة؟

الفاصلة تمثل $\cos x$ والترتيب يمثل $\sin x$. الاتجاه الموجب هو عكس عقارب الساعة. $\pi$ راديان $=$ $180°$ ، أي: الراديان $\times \frac{180}{\pi}$ $=$ الدرجات.

# النهايات (1): المرجعية وحالات عدم التعيين

## نهايات الدوال المرجعية

| الدالة | عند $+\infty$ | عند $-\infty$ | عند $0$ أو عند عدد |
|---|---|---|---|
| $x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ | $n$ زوجي: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$<br>$n$ فردي: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ | |
| $\sqrt{x}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | — | $\lim\limits_{x\to a^<} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$، $\lim\limits_{x\to a^>} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ | $\lim\limits_{x\to0^>} \frac{1}{x} = +\infty$، $\lim\limits_{x\to0^<} \frac{1}{x} = -\infty$ |

$x \to a^>$ تعني: $x$ يؤول إلى $a$ مع $x > a$ (من اليمين)، و $x \to a^<$ مع $x < a$ (من اليسار).

## العمليات على النهايات

| حالات يمكن حسابها | حالات عدم التعيين |
|---|---|
| $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$، $\ell + \infty = +\infty$<br>$(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$، $\ell \times \infty = \infty$ ($\ell \neq 0$، والإشارة بقاعدة الإشارات)<br>$\frac{\ell}{\infty} = 0$، $\frac{\infty}{0} = \infty$، $\frac{\ell}{0} = \infty$ ($\ell \neq 0$) | $+\infty - \infty$، $0 \times \infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\frac{0}{0}$ |

## طرق إزالة عدم التعيين

- **كثير حدود** عند $\pm\infty$: نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة.
- **دالة ناطقة** عند $\pm\infty$: نأخذ نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام (أو نخرج الحد الأكبر عاملا مشتركا).
- **دالة جذرية** عند $\pm\infty$ أو $x_0$: نضرب ونقسم في **المرافق** (مثلا $\sqrt{u}-\sqrt{v} \to \frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$).
- عند $x_0$ (حالة $\frac{0}{0}$): نستعمل **التحليل** أو الجداءات الشهيرة أو العامل المشترك، أو نربطها بعدد مشتق: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

**مثالان**

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2}(x+2) = 4.$$

# النهايات (2): المبرهنات والنهايات الشهيرة

## مبرهنات في النهايات

| المبرهنة | النص |
|---|---|
| التركيب | إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}(v\circ u)(x) = c$ ($a, b, c$ منتهية أو $\pm\infty$). |
| الحصر (الدركين) | إذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. |
| المقارنة | $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $f(x) \ge g(x)$<br>$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $f(x) \le g(x)$<br>$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\lvert f(x) - \ell\rvert \le g(x)$ |

## نهايات الدوال المثلثية

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ |
| $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ | $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin x$ و $\cos x$ ليس لهما نهاية |

## النهايات الشهيرة للدالتين الأسية واللوغاريتمية

| الأسية | اللوغاريتمية |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0^+$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0^>} \ln x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ | $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ |
| $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0^-$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$ | $\lim\limits_{x\to 0^>} x^n \ln x = 0^-$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ |

**رتبة النمو**

عند $+\infty$ ($n > 0$): $e^x \gg x^n \gg \ln x$ ، أي أن الأسية تتغلب على القوى، والقوى تتغلب على اللوغاريتم.

**تذكير**

لحساب $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ فكّر في العدد المشتق $f'(a)$، فهي طريقة سريعة لحساب نهايات كثيرة.

# المستقيمات المقاربة

لتكن $f$ دالة عددية و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

| النهاية | التفسير الهندسي |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ (أو من أحد الجانبين) | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا **عموديا** معادلته $x=x_0$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$ | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا **أفقيا** معادلته $y=y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ | $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا **مائلا** معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$ |

## الفرع اللانهائي: ماذا أفعل؟

إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ :

$\lim\dfrac{f(x)}{x}=0$
($C_f$) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل $(x'x)$

$\lim\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$
نحسب $\lim[f(x)-ax]$

$\lim\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$
($C_f$) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب $(y'y)$

$\lim[f(x)-ax]=b$
مستقيم مقارب مائل: $y=ax+b$

$\lim[f(x)-ax]=\infty$
فرع مكافئ باتجاه المستقيم $y=ax$

### الوضعية النسبية

لتحديد وضع $(C_f)$ بالنسبة للمقارب المائل $y=ax+b$ : $(\Delta)$ ادرس إشارة $f(x)-(ax+b)$:
موجبة $\Rightarrow (C_f)$ فوق $(\Delta)$ ، سالبة $\Rightarrow (C_f)$ تحت $(\Delta)$.

### مثال

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$. بما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ فالمستقيم $y=x+1$ مقارب مائل، و $x=1$ مقارب عمودي لأن $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)=+\infty$.

# الاستمرارية وصورة مجال

## الاستمرارية

| الاستمرارية | التعريف |
|---|---|
| عند $a$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ |
| على يمين $a$ | $\lim\limits_{x\to a^>} f(x) = f(a)$ |
| على يسار $a$ | $\lim\limits_{x\to a^<} f(x) = f(a)$ |

### نتائج

- $f$ مستمرة عند $a$ $\iff$ مستمرة على يمين $a$ وعلى يسارها.
- كل دالة **قابلة للاشتقاق** عند $a$ فهي مستمرة عند $a$ (العكس خاطئ، مثل $x \mapsto |x|$ عند 0).
- كثيرات الحدود والدوال الناطقة والجذرية والمثلثية والأسية واللوغاريتمية مستمرة على مجالات تعريفها.
- مجموع وجداء وحاصل قسمة (مقامه لا ينعدم) وتركيب دوال مستمرة هي دوال مستمرة.
- إذا كانت $(u_n)$ متتالية و $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f$ مستمرة وكانت $(u_n)$ متقاربة نحو $\ell$ فإن $f(\ell) = \ell$.

## صورة مجال بدالة مستمرة ورتيبة تماما

| المجال $I$ | $f$ متزايدة تماما: $f(I)$ | $f$ متناقصة تماما: $f(I)$ |
|---|---|---|
| $[a;b]$ | $[f(a);f(b)]$ | $[f(b);f(a)]$ |
| $[a;b[$ | $\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^<} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x\to b^<} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a;b]$ | $\left]\lim\limits_{x\to a^>} f(x);f(b)\right]$ | $\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^>} f(x)\right[$ |
| $]a;b[$ | $\left]\lim\limits_{x\to a^>} f(x);\lim\limits_{x\to b^<} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x\to b^<} f(x);\lim\limits_{x\to a^>} f(x)\right[$ |

# مبرهنة القيم المتوسطة

| | المبرهنة |
|---|---|
| ① | إذا كانت $f$ مستمرة على $[a;b]$ وكان $k$ محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا واحدا على الأقل في $[a;b]$. |
| ② | إذا كانت $f$ مستمرة و**رتيبة تماما** على $[a;b]$ وكان $k$ محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا **وحيدا** في $[a;b]$. |
| ③ | إذا كانت $f$ مستمرة على $[a;b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\alpha$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(\alpha)=0$. |
| ④ | إذا كانت $f$ مستمرة و**رتيبة تماما** على $[a;b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]a;b[$. |

## كيف أبرهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ثم أحصره؟

**المنهجية**

1. أتأكد أن $f$ **مستمرة** على المجال.
2. أدرس اتجاه تغير $f$ وأثبت أنها **رتيبة تماما** (إشارة $f'$).
3. أحسب $f(a)$ و $f(b)$ (أو النهايات عند الطرفين) وأبيّن أن $0$ محصور بينهما (أي $f(a)\times f(b)<0$).
4. أطبق المبرهنة ④ وأستنتج الوجود والوحدانية.
5. لحصر $\alpha$: أحسب صور أعداد متتالية (مثل $f(1)$ و $f(2)$) حتى تتغير الإشارة، أو أستعمل طريقة المنصفات (التفرع الثنائي).

**مثال**

$f(x)=x^3+x-1$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن $f'(x)=3x^2+1>0$. وبما أن $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1>0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;1[$.

**ملاحظة**

عند العمل على مجال مفتوح أو غير محدود استعمل **النهايات** عند الطرفين بدل $f(a)$ و $f(b)$ (انظر جدول صورة مجال).

# الاشتقاقية: التعريف والدوال المألوفة

## قابلية الاشتقاق

| | التعريف |
|---|---|
| قابلية اشتقاق $f$ عند $a$ | $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (عدد حقيقي) |
| على يمين $a$ | $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^>} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ |
| على يسار $a$ | $f'_g(a) = \lim\limits_{x \to a^<} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ |

$f$ قابلة للاشتقاق عند $a$ $\iff$ $f'_d(a) = f'_g(a)$ (وهما منتهيان). المعادلة المماس عند $a$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

## مشتقات الدوال المألوفة

| $f(x)$ | $f'(x)$ | المجال |
|---|---|---|
| $k$ (ثابت) | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\dfrac{1}{x^n}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | المجال |
|---|---|---|
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $]0;+\infty[$ |

# العمليات على المشتقات واتجاه التغير

## المشتقات والعمليات على الدوال

| الدالة | $u \pm v$ | $au$ | $u \times v$ | $\frac{1}{v}$ | $\frac{u}{v}$ | $u^n$ | $\sqrt{u}$ | $e^u$ | $\ln u$ | $v \circ u$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مشتقتها | $u' \pm v'$ | $au'$ | $u'v + uv'$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ | $nu'u^{n-1}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u'e^u$ | $\frac{u'}{u}$ | $u' \times v'(u)$ |

ملاحظة: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ حيث $u \neq 0$، وللمركب: $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

## اتجاه التغير والقيم الحدية

- $f'(x) > 0$ على $I \Rightarrow f$ متزايدة تماما ؛ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ متناقصة تماما ؛ $f' = 0 \Rightarrow$ ثابتة.
- إذا انعدمت $f'$ عند $x_0$ **مع تغيير الإشارة** فإن $f(x_0)$ **قيمة حدية** (عظمى إذا انتقلت من $+$ إلى $-$، وصغرى إذا انتقلت من $-$ إلى $+$).
- انعدام المشتقة وحده لا يكفي (مثل $x^3$ عند $0$).

## المشتقة الثانية والتحدب

- $f'' > 0$ على $I \Rightarrow (C_f)$ **محدب** (يقع فوق مماساته) ؛ $f'' < 0 \Rightarrow$ **مقعر** (يقع تحت مماساته).
- إذا انعدمت $f''$ مع تغيير الإشارة عند $x_0$ فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ **نقطة انعطاف** (يخترق المنحنى مماسه عندها).

### جدول التغيرات

نبني جدول التغيرات بالترتيب: مجموعة التعريف ← النهايات عند الأطراف ← إشارة $f'$ ← أسهم التغير مع القيم الحدية.

# التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

| النهاية (نسبة التغير) | الاستنتاج | التفسير الهندسي |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ | $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ و $f'(x_0)=a$ | يقبل $(C_f)$ عند $A(x_0;f(x_0))$ مماسا معادلته $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ | $f$ تقبل الاشتقاق و $f'(x_0)=0$ | مماس **أفقي** (موازٍ لمحور الفواصل) معادلته $y=f(x_0)$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{>}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ | $f$ تقبل الاشتقاق على يمين $x_0$ و $f'_d(x_0)=a$ | نصف مماس عند $A$ (على اليمين) معادلته $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{<}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$ | $f$ تقبل الاشتقاق على يسار $x_0$ و $f'_g(x_0)=b$ | نصف مماس عند $A$ (على اليسار) معادلته $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ |
| النهايتان من اليمين واليسار موجودتان ومختلفتان | $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $x_0$ و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$ | نصفا مماسين مختلفين، والنقطة $A$ تسمى **نقطة زاوية** |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{>}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ | غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0$ | نصف مماس **عمودي** موجه نحو الأعلى، معادلته $x=x_0$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{>}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ | غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0$ | نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل، معادلته $x=x_0$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{<}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ | غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0$ | نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل، معادلته $x=x_0$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{<}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ | غير قابلة للاشتقاق على يسار $x_0$ | نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى، معادلته $x=x_0$ |

**مثال للتذكر**

$x\mapsto\sqrt{x}$ عند 0: $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$ فالمنحنى يقبل نصف مماس عموديا عند $O$ ؛ و $x\mapsto|x|$ عند 0: $f'_g(0)=-1\neq f'_d(0)=1$ فالنقطة $O$ نقطة زاوية.

# شفعية دالة، مركز ومحور تناظر، الوضعية النسبية

## الدالة الزوجية والدالة الفردية

| | التعريف (من أجل كل $x \in D_f$ يكون $-x \in D_f$) | التفسير الهندسي |
|---|---|---|
| زوجية | $f(-x) = f(x)$ | $(C_f)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب |
| فردية | $f(-x) = -f(x)$ | $(C_f)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم $O$ |

## مركز تناظر ومحور تناظر

| | التعريف: من أجل كل $x \in D_f$ يكون $(2\alpha - x) \in D_f$ و: |
|---|---|
| $x = \alpha$ محور تناظر لـ $(C_f)$ | $f(2\alpha - x) = f(x)$ |
| $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ | $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ |

**ملاحظة**

عند دراسة دالة زوجية أو فردية يكفي دراستها على $D_f \cap [0;+\infty[$ ثم نكمل الرسم بالتناظر.

## الوضع النسبي بين منحنى ومستقيم

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ و $(\Delta)$ مستقيم معادلته $y = ax + b$: ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

| إشارة $f(x) - y$ | الوضعية النسبية |
|---|---|
| $f(x) - y > 0$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |
| $f(x) - y < 0$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ |
| $f(x) - y = 0$ | $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان |

# إنشاء منحنى انطلاقا من منحنى آخر والمناقشة البيانية

## إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر

$(C_f)$ و $(C_g)$ منحنيان للدالتين $f$ و $g$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

| الدالة | التمثيل البياني |
|---|---|
| $f(x)=g(x)+b$ | $(C_f)$ صورة $(C_g)$ بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$ |
| $f(x)=g(x+a)$ | $(C_f)$ صورة $(C_g)$ بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$ |
| $f(x)=g(x+a)+b$ | $(C_f)$ صورة $(C_g)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$ |
| $f(x)=-g(x)$ | متناظران بالنسبة لمحور الفواصل |
| $f(x)=g(-x)$ | متناظران بالنسبة لمحور التراتيب |
| $f(x)=-g(-x)$ | متناظران بالنسبة لمبدأ المعلم |
| $f(x)=g(\lvert x\rvert)$ | $(C_f)$: $x\geq 0$ ينطبق على $(C_g)$ ؛ $x\leq 0$: نظير الجزء السابق بالنسبة لمحور التراتيب ($f$ زوجية) |
| $f(x)=\lvert g(x)\rvert$ | $g(x)\geq 0$: ينطبق على $(C_g)$ ؛ $g(x)\leq 0$: نظير $(C_g)$ بالنسبة لمحور الفواصل |

## المناقشة البيانية

عدد حلول معادلة بارامترية = عدد نقاط تقاطع $(C_f)$ مع مستقيم متحرك $(m\in\mathbb{R})$.

| المعادلة | الحلول هي فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ مع |
|---|---|
| $f(x)=m$ | المستقيمات الموازية لمحور الفواصل |
| $f(x)=ax+m$ | المستقيمات الموازية لـ $(\Delta):y=ax+b$ |
| $f(x)=mx+b$ | المستقيمات الدوارة حول النقطة $(0;b)$ |
| $f(x)=m^2$ أو $f(x)=\lvert m\rvert$ | المستقيمات الموازية لمحور الفواصل، لكن $y=m^2$ و $y=\lvert m\rvert$ تبدآن من محور الفواصل نحو الأعلى |
| $f(x)=f(m)$ | المستقيم الأفقي $y=f(m)$ |

**ملاحظات**

- الحل موجب إذا كانت نقطة التقاطع على يمين محور التراتيب، وسالب إذا كانت على يساره.
- الحل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة التماس.

# منهجية دراسة دالة عددية

## الخطوات بالترتيب

1. **مجموعة التعريف** $D_f$ (مقام $\neq 0$، جذر $\geq 0$، $\ln$ ما بداخله $> 0$).
2. **الزوجية/الفردية/الدورية** إن أمكن لتقليص مجال الدراسة.
3. **النهايات** عند أطراف $D_f$ واستنتاج المستقيمات المقاربة.
4. **المشتقة** $f'(x)$ ثم تحليلها ودراسة إشارتها.
5. **جدول التغيرات** (مع القيم الحدية).
6. **تقاطع المنحنى** مع المحورين، المماسات المهمة، الوضعية النسبية، نقاط الانعطاف.
7. **رسم المنحنى** (المقاربات أولا ثم المماسات ثم النقاط).

**مثال:** $f(x) = x^3 - 3x$

$D_f = \mathbb{R}$، $f$ فردية، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f(x) | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

**تفسير**

$f(-1) = 2$ قيمة حدية عظمى محلية و $f(1) = -2$ قيمة حدية صغرى محلية. $f''(x) = 6x$ تنعدم عند $0$ مع تغيير الإشارة فالنقطة $O$ نقطة انعطاف (وهي مركز تناظر لأن $f$ فردية).

**أخطاء شائعة**

- نسيان $D_f$ قبل الاشتقاق.
- إهمال حساب النهايات عند الأطراف المفتوحة.
- الاكتفاء بـ $f'(x) = 0$ دون دراسة تغيّر الإشارة.

# الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

## التعريف

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ والتي تنعدم عند 1.
معرفة على $]0;+\infty[$، مستمرة ومتزايدة تماما وتحقق $\ln 1 = 0$ و $\ln e = 1$ حيث $e \approx 2{,}718$.

## الخواص الجبرية ($x>0$ و $y>0$ و $n \in \mathbb{Z}$)

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln x^n = n \ln x$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \qquad \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \qquad (x \in \mathbb{R})\ \ln e^x = x \text{ ، } (x>0)\ e^{\ln x} = x$$

## المعادلات والمتراجحات

| المعادلة أو المتراجحة | الحل |
|---|---|
| $\ln x = \ln y$ | $x = y$ (مع $x, y > 0$) |
| $\ln x > \ln y$ | $x > y$ |
| $\ln x = a$ | $x = e^a$ |
| $\ln x > 0$ | $x > 1$ |
| $\ln x < 0$ | $0 < x < 1$ |

## مجموعة التعريف والاشتقاق

| الدالة | شرط التعريف | المشتقة |
|---|---|---|
| $f(x) = \ln u(x)$ | $u(x) > 0$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ |
| $f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$ | $u(x) \neq 0$ | $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ |

## النهايات الشهيرة

$$\lim_{x\to 0^>} x\ln x = 0^- \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^>} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

### اللوغاريتم العشري

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ ($x>0$)، ويحقق $\log 10 = 1$ و $\log 10^n = n$. وللأساس العام: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

# الدالة الأسية

## التعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق $f' = f$ و $f(0) = 1$. نكتب $f(x) = e^x = \exp(x)$. وهي **التبادلية العكسية** لدالة ln : $x = \ln y \iff y = e^x$ $(y > 0)$.

## الخواص ($x, y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$)

$$e^1 = e \text{ ، } e^0 = 1$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

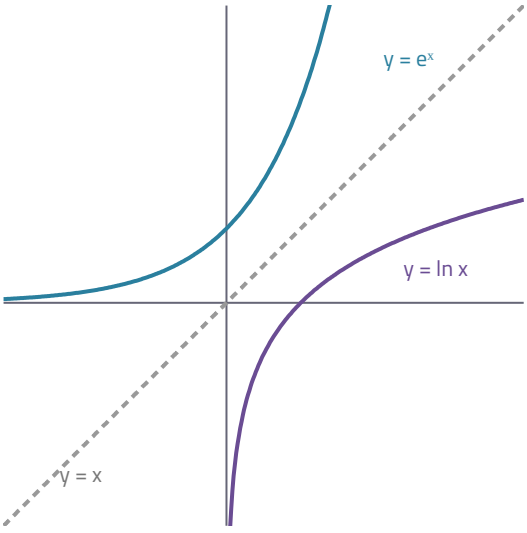
$e^x > 0$ دائما

| المعادلة أو المتراجحة | الحل |
|---|---|
| $e^x = e^y$ | $x = y$ |
| $e^x > e^y$ | $x > y$ |
| $e^x = a \ (a > 0)$ | $x = \ln a$ |
| $e^x < a \ (a > 0)$ | $x < \ln a$ |

## الاشتقاق والنهايات

| الدالة | المشتقة | ملاحظة |
|---|---|---|
| $f(x) = e^{u(x)}$ | $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ | معرفة إذا كانت $u$ معرفة |
| $e^{ax+b}$ | $a\, e^{ax+b}$ | |

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$




### التناظر

منحنيا ln و exp متناظران بالنسبة للمستقيم $y = x$ (المنصف الأول).

# المتتاليتان الحسابية والهندسية

| | المتتالية الحسابية (الأساس $r$) | المتتالية الهندسية (الأساس $q$) |
|---|---|---|
| التعريف | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = u_n \times q$ |
| الحد العام | $u_n = u_0 + nr$ ؛ $u_n = u_1 + (n-1)r$ ؛ $u_n = u_p + (n-p)r$ | $u_n = u_0\, q^n$ ؛ $u_n = u_1\, q^{n-1}$ ؛ $u_n = u_p\, q^{n-p}$ |
| الوسط | $a, b, c$ حدود متتابعة $\iff a + c = 2b$ | $a, b, c$ حدود متتابعة $\iff a \times c = b^2$ |
| المجموع | $S = \dfrac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الأول} + \text{الأخير})$ | $S = \text{الأول} \times \dfrac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ $(q \neq 1)$ |
| اتجاه التغير | $r > 0$ متزايدة ؛ $r < 0$ متناقصة ؛ $r = 0$ ثابتة | $q > 1$ $(u_0 > 0$ مع$)$ متزايدة ؛ $0 < q < 1$ متناقصة ؛ $q = 1$ ثابتة |
| التقارب | $r > 0$: $\lim u_n = +\infty$ ؛ $r < 0$: $\lim u_n = -\infty$ (دائما متباعدة) | $q > 1$: $\lim u_n = \pm\infty$ ؛ $-1 < q < 1$: $\lim u_n = 0$ ؛ $q \leq -1$: لا نهاية (متباعدة) |

**عدد الحدود**

عدد الحدود بين $u_p$ و $u_n$ (شاملين) $= n - p + 1$، أي: الأول $-$ الأخير $+ 1$ كأدلة.

**مجاميع شهيرة**

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ؛ \quad 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \ (q \neq 1)$$

## المتتالية $u_{n+1} = au_n + b$ $(a \neq 0, 1)$

**المنهجية**

نحل $\ell = a\ell + b$ فنجد $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ ثم نضع $v_n = u_n - \ell$ فتكون $(v_n)$ هندسية أساسها $a$، ومنه $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.

# الاستدلال بالتراجع وخواص المتتاليات

## الاستدلال بالتراجع

**لإثبات خاصية $P(n)$ من أجل كل $n \geq n_0$**

1. **التحقق:** نتأكد من صحة $P(n_0)$.
2. **الوراثة:** نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq n_0$ (فرضية التراجع) ونبرهن $P(n+1)$.
3. **الخلاصة:** $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq n_0$.

## المتتاليات المحدودة والرتيبة

| المفهوم | التعريف |
|---|---|
| محدودة من الأعلى | يوجد $A$ بحيث $u_n \leq A$ من أجل كل $n$ |
| محدودة من الأسفل | يوجد $B$ بحيث $u_n \geq B$ من أجل كل $n$ |
| محدودة | محدودة من الأعلى ومن الأسفل |
| متزايدة / متناقصة | $u_{n+1} - u_n \geq 0$ / $\leq 0$ ؛ أو (حدود موجبة) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ / $\leq 1$ |

## مبرهنات التقارب

- كل متتالية **متزايدة ومحدودة من الأعلى** متقاربة.
- كل متتالية **متناقصة ومحدودة من الأسفل** متقاربة.
- متزايدة وغير محدودة من الأعلى $\Rightarrow \lim u_n = +\infty$.
- مبرهنة الحصر: $v_n \leq u_n \leq w_n$ و $\lim u_n = \ell \Rightarrow \lim v_n = \lim w_n = \ell$.
- المقارنة: $u_n \geq v_n$ و $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty$.
- **متتاليتان متجاورتان:** إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة و $\lim(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow$ لهما نفس النهاية.

## المتتالية المعرفة بـ $u_{n+1} = f(u_n)$

**خطوات الدراسة**

1. نبرهن بالتراجع أن $u_n \in I$ ($I$ مجال يحقق $f(I) \subset I$).
2. ندرس الرتابة: بالتراجع (إذا كانت $f$ متزايدة) أو بدراسة إشارة $f(x) - x$.
3. نستنتج التقارب ثم نحسب النهاية $\ell$ بحل $f(\ell) = \ell$ (مع $f$ مستمرة).

# الأعداد المركبة: الأشكال والخواص

## الأشكال الثلاثة لعدد مركب غير معدوم $z$

| الشكل الجبري | الشكل المثلثي | الشكل الأسي |
|---|---|---|
| $z = x + iy$ مع $i^2 = -1$ | $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ | $z = re^{i\theta}$ |
| $x = \mathrm{Re}(z)$ ، $y = \mathrm{Im}(z)$ | الطويلة: $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ | ترميز أولر: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ |
| المرافق: $\bar{z} = x - iy$ | العمدة: $\arg z = \theta + 2k\pi$ | $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ |

| خواص الشكل الجبري | خواص العمدة | خواص الشكل الأسي |
|---|---|---|
| $z = 0$ و $y = 0 \iff x = 0$ | $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ | $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ |
| $z = z'$ و $y = y' \iff x = x'$ | $\arg\dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$ | $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ |
| $z$ حقيقي $\iff z = \bar{z}$ | $\arg\bar{z} = -\arg z$ ، $\arg\dfrac{1}{z} = -\arg z$ | $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ |
| $z$ تخيلي صرف $\iff z = -\bar{z}$ | $(n \in \mathbb{Z})\ \arg(z^n) = n\arg z$ | $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ، $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ |
| $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$ ، $z\bar{z} = x^2+y^2 = \lvert z\rvert^2$ | | $z^n = r^n e^{in\theta}$ |

### مبرهنة موافر وصيغتا أولر

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ؛ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ، $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (تستعمل في التخطيط).

### حالات خاصة

$\lvert z\rvert = 1 \Rightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$ ؛ $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\theta/2}$ ؛ $\lvert z+z'\rvert \le \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$.

| التفسير الهندسي | العبارة المركبة |
|---|---|
| المسافة بين النقطتين $A$ و $B$ | $AB = \lvert z_B - z_A \rvert$ |
| لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ | $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ |
| $I$ منتصف $[AB]$ | $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ |
| $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ | $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$ |
| $G$ مرجح $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\lambda)\}$ | $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \lambda}$ |
| $A, B, C$ على استقامة واحدة ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$) | $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عدد حقيقي |
| الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان | $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ عدد تخيلي صرف |
| قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ | $\arg(z_B - z_A)$ ($\vec{u}$ هو $\vec{i}$ أو $\overrightarrow{OI}$) |
| قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ | $\arg \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ |

## مجموعات نقط في المستوي المركب

| الشرط | المجموعة |
|---|---|
| $\lvert z - z_A \rvert = r$ | دائرة مركزها $A$ ونصف قطرها $r$ |
| $\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$ | محور القطعة $[AB]$ |
| $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ | نصف مستقيم مبدؤه $A$ (من دون $A$) |
| $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ حقيقي | المستقيم $(AB)$ (من دون $B$) |
| $\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ تخيلي صرف | الدائرة التي قطرها $[AB]$ (من دون $A$ و $B$) |

**تذكير**

لحل مسألة هندسية بالأعداد المركبة: اكتب اللواحق ← كوّن النسبة $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ← احسب طويلتها (نسبة الأطوال) وعمدتها (الزاوية).

# متوازي الأضلاع، المعين، المربع، المستطيل والمثلثات

| الشكل | الشرطان (أحدهما يكفي) |
|---|---|
| متوازي الأضلاع $ABCD$ | ① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي $z_B - z_A = z_C - z_D$<br>② القطران متناصفان: $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ |
| المعين $ABCD$ | ① متوازي أضلاع و $AB = AD$ أي $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_D - z_A\rvert$<br>② القطران متناصفان ومتعامدان: $\arg\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \pm\frac{\pi}{2}$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ |
| المستطيل $ABCD$ | ① متوازي أضلاع و $\arg\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{\pi}{2}$<br>② القطران متناصفان ومتساويان: $\lvert z_B - z_D\rvert = \lvert z_A - z_C\rvert$ و $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ |
| المربع $ABCD$ | ① متوازي أضلاع و $AB = AD$ و $\arg\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{\pi}{2}$<br>② القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان |
| مثلث قائم في $A$ | $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{\pi}{2}$ |
| مثلث قائم ومتساوي الساقين في $A$ | $\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$ و $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{\pi}{2}$ |
| مثلث متقايس الأضلاع $ABC$ | ① $\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$ و $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{\pi}{3}$<br>② $\lvert z_A - z_B\rvert = \lvert z_A - z_C\rvert = \lvert z_B - z_C\rvert$ |
| مثلث متساوي الساقين في $A$ | $\lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_C - z_A\rvert$ |

**نصيحة**

الطريقة الأسرع في أغلب التمارين: احسب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ واكتبه بالشكل الأسي، فتقرأ منه الطويلة والعمدة فورا.

# التحويلات النقطية والمعادلات في المركبة

## التحويل $f$ ذو العبارة المركبة $z' = az + b$

| الحالة | طبيعة التحويل وعناصره المميزة | العبارة المختصرة |
|---|---|---|
| $a = 1$ $(b \neq 0)$ | **انسحاب** شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $b$ | $z' = z + b$ |
| $a \neq 1$ ، $a \in \mathbb{R}$ | **تحاكٍ** نسبته $k = a$ ومركزه $\Omega$ ذو اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ | $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$ |
| $\lvert a\rvert = 1$ ، $a \neq 1$ | **دوران** مركزه $\Omega$ $(z_\Omega = \dfrac{b}{1-a})$ وزاويته $\theta = \arg a$ | $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$ |
| $a \notin \mathbb{R}$ و $\lvert a\rvert \neq 1$ | **تشابه مباشر** نسبته $k = \lvert a\rvert$ وزاويته $\theta = \arg a$ ومركزه $\Omega$ $(z_\Omega = \dfrac{b}{1-a})$ | $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$ |

**تذكير**

المركز $\Omega$ هو النقطة الصامدة: $z_\Omega = az_\Omega + b$. والتحويل يحفظ: الاستقامية والزوايا الموجهة (في التشابه والدوران والتحاكي والانسحاب).

## معادلات في المجموعة $\mathbb{C}$

**$az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c$ حقيقية، $a \neq 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$)**

- $\Delta > 0$: حلان حقيقيان $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: حل مضاعف $z = \dfrac{-b}{2a}$.
- $\Delta < 0$: حلان مركبان مترافقان $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

**الجذور النونية للعدد 1 (للشعب التي تدرسها)**

المعادلة $z^n = 1$ حلولها $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ ، $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ، ومجموعها يساوي 0. وللمعادلة $z^n = re^{i\theta}$ : $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$.

**مثال**

$z^2 + 2z + 5 = 0$: $\Delta = -16$ فالحلان $z = -1 \pm 2i$.

# الهندسة الفضائية (1): الأشعة والمستويات والكرة

المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد ومتجانس، $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ و $C(x_C;y_C;z_C)$.

| العبارة | القانون |
|---|---|
| مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ | $(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A\ ;\ z_B-z_A)$ |
| طويلة الشعاع $\vec{u}(x;y;z)$ | $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ |
| المسافة بين نقطتين | $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ |
| منتصف $[AB]$ | $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ |
| الجداء السلمي | $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$ |
| العبارة التحليلية | $\vec{u}(x;y;z)\cdot\vec{v}(x';y';z')=xx'+yy'+zz'$ |
| التعامد | $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ |
| الارتباط الخطي (التوازي) | $\vec{u}=k\vec{v}\iff\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$ |
| المعادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ | $ax+by+cz+d=0$ حيث $\vec{n}(a;b;c)$ ناظمي له |
| توازي مستويين | $\vec{n}=k\vec{n'}$ (الناظمان مرتبطان خطيا) |
| تعامد مستويين | $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$ |
| بعد النقطة $A$ عن $(P)$ | $d(A;(P))=\frac{\|ax_A+by_A+cz_A+d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ |
| معادلة سطح كرة | $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ مركزها $\omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها $r$ |
| مساحة مثلث | $S=\frac{1}{2}\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع |
| حجم رباعي الوجوه | $V=\frac{1}{3}\times S\times h$ ($S$ مساحة القاعدة، $h$ الارتفاع) |

# الهندسة الفضائية (2): المرجح والتمثيلات الوسيطية

## المرجح

| العبارة | القانون |
|---|---|
| $G$ مرجح $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ ($\alpha+\beta\neq 0$) | $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ : $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$ |
| $G$ مرجح ثلاث نقط ($\alpha+\beta+\delta\neq 0$) | $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ : $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta}$ (وكذلك $y_G$ و $z_G$) |
| مركز ثقل المثلث $ABC$ | $G$ مرجح $\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$ |

## تمثيلات المستقيم والمستوي

| العبارة | التمثيل |
|---|---|
| التمثيل الوسيطي للمستقيم $(d)$ المار بـ $A$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a;b;c)$ | $t\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$ |
| التمثيل الديكارتي للمستقيم $(d)$ | $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ ($abc\neq 0$) |
| التمثيل الوسيطي للمستوي $(P)$ المار بـ $A$ وشعاعا توجيهه $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ | $t,s\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases}x=x_A+at+a's\\y=y_A+bt+b's\\z=z_A+ct+c's\end{cases}$ |

## مجموعة النقط $M$ في الفضاء

| الشرط | المجموعة |
|---|---|
| $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ | المستوي الذي يشمل $A$ و $\vec{n}$ ناظمي له |
| $AM=BM$ | المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ |
| $AM=r$ أو $AM=AB$ | سطح كرة مركزها $A$ ونصف قطرها $r$ (أو $AB$) |
| $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ | سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ |
| $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}>0$ أو $<0$ | نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل $A$ و $\vec{n}$ ناظمي له |
| $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=k$ ($k\neq 0$) | المستوي العمودي على $(AB)$ والذي يشمل النقطة $H$ المسقط العمودي لـ $M$ على $(AB)$ |

# الهندسة الفضائية (3): الأوضاع النسبية

## وضعية مستقيم ومستوي

$(d)$ مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}$ ويشمل $A$ ، و $(P)$ مستوٍ شعاعه الناظمي $\vec{n}$.

| الحالة | الاستنتاج |
|---|---|
| $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ و $A\notin(P)$ | $(d)$ يوازي $(P)$ تماما (لا نقطة مشتركة) |
| $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ و $A\in(P)$ | $(d)$ محتوى في $(P)$ |
| $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$ | $(d)$ يقطع $(P)$ في نقطة وحيدة: نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة $(P)$ لإيجاد $t$ |
| $\vec{u}=k\vec{n}$ | $(d)$ عمودي على $(P)$ |

## وضعية مستويين

| الحالة | الاستنتاج |
|---|---|
| $\vec{n}=k\vec{n}'$ | متوازيان (منطبقان إذا اشتركا في نقطة، متباعدان تماما وإلا) |
| $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا | يتقاطعان وفق مستقيم: نحل جملة المعادلتين ونضع $x$ أو $z$ وسيطا |
| $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ | متعامدان |

## وضعية مستقيمين $(d)$ و $(d')$

| الحالة | الاستنتاج |
|---|---|
| $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا | متوازيان (أو منطبقان إذا اشتركا في نقطة) |
| غير مرتبطين وجملة التقاطع لها حل | متقاطعان في نقطة |
| غير مرتبطين وجملة التقاطع بلا حل | غير متقاطعين وغير متوازيين (لا ينتميان إلى مستوٍ واحد) |

## المسقط العمودي وسطح الكرة

- المسقط العمودي للنقطة $M$ على المستوي $(P)$ هو نقطة تقاطع $(P)$ مع المستقيم المار بـ $M$ والعمودي على $(P)$ (شعاع توجيهه $\vec{n}$).
- مستوٍ $(P)$ وكرة مركزها $\omega$ ونصف قطرها $r$: إذا كان $d(\omega;(P))<r$ فالتقاطع دائرة، وإذا كان $=r$ فهو مماس (نقطة)، وإذا كان $>r$ فلا تقاطع.

**نصيحة**

دوّن دائما شعاع التوجيه وشعاع الناظم وأي نقطة معلومة في بداية الحل؛ فمعظم الأسئلة تُحل بالجداء السلمي والتمثيل الوسيطي.

# الدوال الأصلية

## أسئلة أساسية

| السؤال | الجواب |
|---|---|
| شرط وجود دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على $I$ | يكفي أن تكون $f$ **مستمرة** على $I$ |
| عدد الدوال الأصلية لـ $f$ على $I$ | عدد غير منته: $F(x)+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$ |
| أثبت أن $F$ أصلية لـ $f$ على $I$ | يكفي إثبات $F'(x)=f(x)$ من أجل كل $x\in I$ |
| بيّن أن $F$ و $G$ أصليتان لنفس الدالة | يكفي إثبات $F'(x)=G'(x)$ على $I$ (الفرق ثابت) |
| الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة $y_0$ عند $x_0$ | نحدد الثابت $k$ من الشرط $F(x_0)=y_0$ (وهي وحيدة) |

## الدوال الأصلية لدوال مألوفة

| $f(x)=$ | $F(x)=$ | $I$ |
|---|---|---|
| $a$ | $ax+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $\frac{1}{2}x^2+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x}+c$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{x^n}\ (n\geq 2)$ | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+c$ | $]0;+\infty[$ |

| $f(x)=$ | $F(x)=$ | $I$ |
|---|---|---|
| $e^x$ | $e^x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^{ax+b}\ (a\neq 0)$ | $\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+c$ | $]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$ |
| $\ln x$ | $x\ln x-x+c$ | $]0;+\infty[$ |
| $\cos x$ | $\sin x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ | $\mathbb{R}$ |

## الدوال الأصلية والعمليات على الدوال

| الدالة $f$ | الدالة الأصلية $F$ | الشروط على $u$ |
|---|---|---|
| $u'u^n\ (n\neq -1)$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ | تخص $n\in\mathbb{N}$ أو $u\neq 0$ عند السالب |
| $u'u$ | $\frac{1}{2}u^2+c$ | |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u}+c$ | $u(x)\neq 0$ على $I$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}+c$ | $u(x)>0$ على $I$ |
| $u'e^u$ | $e^u+c$ | |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert+c$ | $u(x)\neq 0$ على $I$ |

**سلسلة المشتقات والأصليات**

$\sin x \xrightarrow{\text{مشتقة}} \cos x \xrightarrow{\text{مشتقة}} -\sin x \xrightarrow{\text{مشتقة}} -\cos x \to \sin x$ ، وعكس الاتجاه يعطي الدوال الأصلية.

# المعادلات التفاضلية والتكامل

## المعادلات التفاضلية

| المعادلة | الحلول |
|---|---|
| $y' = ay$ | $y = Ce^{ax}$ |
| $y' = ay + b\ (a \neq 0)$ | $y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ |
| $y' = f(x)$ | $y = F(x) + c$ |
| $y'' = f'(x)$ | $y = F(x) + c_1 x + c_2$ |
| $y'' = -\omega^2 y$ | $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ (أو $A\cos(\omega x + \varphi)$) |

لتعيين الثابت نستعمل شرطا ابتدائيا مثل $y(0) = y_0$. وحل $y' = ay$ الذي يحقق $y(x_0) = y_0$ هو $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

## الحساب التكاملي

| العبارة | القانون |
|---|---|
| التكامل المحدود | $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ |
| التكامل غير المحدود | $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + k$ |
| علاقة شال | $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ |
| الخطية | $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ |
| التكامل بالتجزئة | $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ |
| القيمة المتوسطة على $[a;b]$ | $\displaystyle m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ |

### مقارنة التكاملات (مع $a < b$)

- $f \geq 0$ على $[a;b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- $f \leq g$ على $[a;b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ ؛ وإذا كان $m \leq f \leq M$ فإن $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f \leq M(b-a)$.

### متى أستعمل التجزئة؟

عندما يكون الجداء بين كثير حدود و ($e^x$ أو sin أو cos أو ln): اشتق كثير الحدود، وخذ $v'$ الدالة التي تعرف أصليتها.
وفي حالة ln نضع $u = \ln x$.

# حساب المساحات والحجوم

| الحالة | المساحة $S$ (بالوحدة $ua$) |
|---|---|
| $f \geq 0$ على $[a;b]$ (المنحنى فوق المحور) | $S = \int_a^b f(x)\,dx$ |
| $f \leq 0$ على $[a;b]$ (المنحنى تحت المحور) | $S = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ |
| $f$ تغيّر إشارتها عند $c \in [a;b]$ | $S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b -f(x)\,dx$ (نقسم عند الجذر) |
| المنحنى $(C_f)$ فوق $(C_g)$ على $[a;b]$ | $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ |
| المنحنيان يتقاطعان عند $c$ | $S = \int_a^c [f-g]\,dx + \int_c^b [g-f]\,dx$ |
| المساحة بين $(C_f)$ والمحور وبين $x=a$ و $x=b$ (عام) | $S = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ |

## وحدة المساحة

$1\ ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ : يجب ضرب كل المساحات في هذه الوحدة (مثلا إذا كانت $\|\vec{i}\| = 2\ \text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 3\ \text{cm}$ فإن $1\ ua = 6\ \text{cm}^2$).

| الحجوم | القانون |
|---|---|
| حجم المجسم المولد بدوران المنحنى $(C_f)$ حول المحور $(x'x)$ بين $x=a$ و $x=b$ | $V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx$ (بوحدة الحجم $uv$) |
| الأسطوانة (نصف قطر $r$ وارتفاع $h$) | $V = \pi r^2 h$ — للتحقق بتكامل $f(x) = r$ |
| المخروط | $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ |
| الكرة (نصف قطر $r$) | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، وتنتج عن دوران $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ |

## خطوات حساب مساحة

1. ارسم أو ادرس إشارة $f$ (أو $f-g$) على المجال.
2. قسّم المجال عند الأصفار التي تغير الإشارة.
3. أنشئ التكاملات المناسبة واحسب بالدوال الأصلية.
4. اضرب في $ua$ واذكر الوحدة.

# الاحتمالات (1): القوانين الأساسية

| المفهوم | القانون |
|---|---|
| احتمال الحادثة $A$ | $P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}}$ ، $0 \le P(A) \le 1$ |
| الحادثة العكسية $\bar{A}$ | $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ |
| احتمال الاتحاد | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (إذا كانتا غير متلائمتين: $P(A \cap B) = 0$) |
| الاحتمال الشرطي ($A$ علما $B$) | $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ($P(B) \neq 0$) |
| الحادثتان المستقلتان | $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (وعندها $P_B(A) = P(A)$) |
| الاحتمالات الكلية | $P(A) = P(B)\,P_B(A) + P(\bar{B})\,P_{\bar{B}}(A)$ |
| صيغة بايز | $P_A(B) = \frac{P(B)\,P_B(A)}{P(A)}$ |

## شجرة الاحتمالات

- مجموع احتمالات الفروع الخارجة من عقدة واحدة $= 1$.
- احتمال مسار = جداء احتمالات فروعه.
- احتمال حادثة = مجموع احتمالات المسارات التي تحققها.

## أنواع السحب (من $n$ كرة، سحب $p$ كرة)

| السحب | الترتيب | التكرار | عدد الطرق |
|---|---|---|---|
| على التوالي وبإرجاع | مهم | مسموح ($p$ لا يرتبط بـ $n$) | $n^p$ |
| على التوالي ودون إرجاع | مهم | غير مسموح ($n \ge p$) | $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ |
| في آن واحد | غير مهم | غير مسموح ($n \ge p$) | $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ |

### كيف أختار الطريقة؟

اسأل: هل **الترتيب** مهم؟ هل **التكرار** مسموح؟ — النتيجة تحدد القانون. وللجان: إذا ذُكرت وظيفة كل شخص (رئيس، أمين...) فالترتيب مهم $A_n^p$ ، وإلا فهو غير مهم $C_n^p$.

## عدّ طرق إجراء تجربتين

إذا كانت التجربة الأولى تتم بـ $n_1$ طريقة والثانية بـ $n_2$ طريقة: إجراؤهما معا (الأولى **و** الثانية) : $n_1 \times n_2$
وإجراء إحداهما فقط (الأولى **أو** الثانية) $n_1 + n_2$.

# الاحتمالات (2): التعداد والمتغير العشوائي والقانون الثنائي

## التعداد

| العبارة | القانون |
|---|---|
| عاملي | $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ ، $0! = 1$ وهو عدد تبديلات $n$ عنصرا |
| $C_n^p$ | $C_n^1 = n$ ؛ $C_n^0 = C_n^n = 1$ ؛ $C_n^p = C_n^{n-p}$ |
| علاقة باسكال | $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ |
| ثنائي الحد (نيوتن) | $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ |

## المتغير العشوائي

**متغير عشوائي $X$ يأخذ القيم $x_1, \ldots, x_n$ باحتمالات $p_i = P(X = x_i)$ ($\sum p_i = 1$)**

- **الأمل الرياضي:** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- **التباين:** $V(X) = \sum p_i x_i^2 - [E(X)]^2$ ، **الانحراف المعياري:** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- $E(aX+b) = aE(X) + b$ ؛ $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

## القانون الثنائي

**إجراء $n$ تجربة مستقلة، لكل منها نتيجتان (نجاح باحتمال $p$ وفشل باحتمال $1-p$)**

$X$ = عدد النجاحات $\Rightarrow$ $X$ يتبع القانون الثنائي $\mathcal{B}(n;p)$ :

$P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$ ، $k = 0, 1, \ldots, n$ ؛ $E(X) = np$ ، $V(X) = np(1-p)$.

### مثال

نرمي قطعة نقود متوازنة 4 مرات: $P(\text{ظهور وجه واحد بالضبط}) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ و $E(X) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

### عبارة «على الأقل»

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$ — استعمل الحادثة العكسية كلما ظهرت عبارة «على الأقل».

# الموافقات في $\mathbb{Z}$ والقاسم المشترك الأكبر

## الموافقات

### التعريف

العددان الصحيحان $a$ و $b$ متوافقان بتردد $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) إذا وفقط إذا كان $a-b$ من مضاعفات $n$، ونكتب $a \equiv b\ [n]$ (أي لهما نفس باقي القسمة على $n$).

| الخواص: إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن |
|---|
| $a+c \equiv b+d\ [n]$ ، $a-c \equiv b-d\ [n]$ ، $a \times c \equiv b \times d\ [n]$ |
| $(p \in \mathbb{N})\ a^p \equiv b^p\ [n]$ ، $a+k \equiv b+k\ [n]$ ، $(k \in \mathbb{Z})\ ka \equiv kb\ [n]$ |
| التعدّي: $a \equiv b\ [n]$ و $a \equiv c\ [n] \Rightarrow b \equiv c\ [n]$ |
| $a \equiv 0\ [m]$ و $a \equiv 0\ [n]$ مع $m$ و $n$ أوليين فيما بينهما $\Rightarrow a \equiv 0\ [mn]$ |
| $ab \equiv 0\ [n]$ مع $n$ **أولي** $\Rightarrow a \equiv 0\ [n]$ أو $b \equiv 0\ [n]$ |

### طريقة جدول البواقي

لإيجاد باقي $a^k$ على $n$ أو دراسة قابلية القسمة: ننشئ جدولا لباقي $x$ على $n$ ثم باقي العبارة المطلوبة (مثلا مربعات الأعداد على 4 أو 5)، ونستغل **الدور** $a^{p+q} \equiv a^p$.

## القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

| خواص $PGCD$ و $PPCM$ |
|---|
| $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ حيث $a \geq b$ و $r$ باقي قسمة $a$ على $b$ (خوارزمية إقليدس) |
| $(k \in \mathbb{Z}^*)\ PGCD(ka;kb) = \lvert k \rvert \times PGCD(a;b)$ |
| $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = \lvert a \times b \rvert$ |
| إذا كان $PGCD(a;b) = d$ فإن $a = da'$ و $b = db'$ مع $PGCD(a';b') = 1$ |
| $PGCD(a;b^n) = 1$ و $PGCD(a^n;b^n) = 1 \Rightarrow PGCD(a;b) = 1$ |

### مثال (خوارزمية إقليدس)

$PGCD(252;105)$: $252 = 2 \times 105 + 42$ ثم $105 = 2 \times 42 + 21$ ثم $42 = 2 \times 21 + 0 \Rightarrow PGCD = 21$ (آخر باق غير معدوم).

# مبرهنات بيزو وغوص وفيرما

## مبرهنة بيزو

العددان الطبيعيان غير المعدومين $a$ و $b$ أوليان فيما بينهما $\iff$ يوجد عددان صحيحان $x$ و $y$ بحيث $ax + by = 1$.

### تعميم

$PGCD(a;b) = d \iff$ توجد $x, y$ بحيث $ax + by = d$ ، وكل عدد $ax + by$ هو من مضاعفات $d$.

## مبرهنة غوص

ليكن $a, b, c$ ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة: إذا كان $a$ يقسم الجداء $bc$ وكان $a$ أوليا مع $b$ فإن $a$ يقسم $c$.

## المبرهنة الصغيرة لفيرما

إذا كان $p$ عددا أوليا و $a$ عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على $p$ فإن $p$ يقسم $(a^{p-1} - 1)$ ، أي $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ ، وكذلك $a^p \equiv a\ [p]$ لكل $a$.

## المعادلات الديوفانتية $ax + by = c$

### الطريقة

1. احسب $d = PGCD(a;b)$ ؛ إذا لم يقسم $d$ العدد $c$ فلا حلول.
2. قسّم على $d$ للحصول على $a'x + b'y = c'$ مع $PGCD(a';b') = 1$.
3. أوجد حلا خاصا $(x_0; y_0)$ (بإقليدس أو بالتجريب).
4. باستعمال غوص: $x = x_0 + kb'$ ، $y = y_0 - ka'$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

### مثال

$3x + 5y = 1$: حل خاص $(2; -1)$ لأن $6 - 5 = 1$ ، والحلول $(2 + 5k\ ;\ -1 - 3k)$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

### تذكير

عدد أولي: يقبل قاسمين فقط (1 ونفسه). وللتحقق من أن $n$ أولي يكفي اختبار القسمة على الأعداد الأولية $\leq \sqrt{n}$.

# نصائح ذهبية للنجاح في البكالوريا

## قبل الامتحان

- احفظ **القوانين** بالفهم لا بالتلقين، وجرّب كتابتها من الذاكرة ثم قارنها بهذا الملخص.
- حلّ **مواضيع بكالوريات سابقة** بتوقيت حقيقي (3 ساعات) وصحّحها بصرامة.
- أعدّ **دفتر أخطاء**: كل خطأ ترتكبه سجّله مع تصحيحه وراجعه أسبوعيا.
- نظّم وقتك: الباب الأصعب يتطلب جلسات قصيرة متكررة أفضل من جلسة طويلة واحدة.

## أثناء الامتحان

- اقرأ الموضوع كاملا (5 دقائق) وابدأ بالتمرين الذي تتقنه.
- اكتب **مجموعة التعريف** دائما قبل أي دراسة دالة.
- برّر كل خطوة بمبرهنة أو خاصية (مستمرة، رتيبة تماما، إلخ).
- لا تترك سؤالا فارغا: حتى الجزء الصحيح من الحل يُنقّط.
- إذا علقت في سؤال فاستعمل **نتيجته المعطاة** في الأسئلة اللاحقة وتابع.
- راجع الحسابات والوحدات (المساحة بالوحدة $ua$) والإشارات قبل التسليم.

## أخطاء يجب تفاديها

- $\sqrt{x^2} = x$ **خطأ** ، الصحيح $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ **خطأ** ، الصحيح $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ **خطأ** ، الصحيح $a^2 + 2ab + b^2$.
- نسيان قلب المتراجحة عند الضرب أو القسمة في عدد سالب.
- القسمة على تعبير قد ينعدم دون بحث حالته.
- الخلط بين نهاية دالة ونهاية متتالية، وبين الاستمرارية والاشتقاقية.

## بالتوفيق والنجاح لكل طلاب البكالوريا ✦